Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-nt} \\ v(t) = t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -\dfrac{e^{-nt}}{n} \\ v'(t) = 2t \end{cases}$

d'où : $I_n(x) = \left[ -\dfrac{t^2 e^{-nt}}{n} \right]_0^x + \dfrac{2}{n} \int_0^x te^{-nt}\,dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-nt} \\ v(t) = t \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -\dfrac{e^{-nt}}{n} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

d'où : $\displaystyle\int_0^x te^{-nt}\,dt = \left[ -\frac{te^{-nt}}{n} \right]_0^x + \frac{1}{n} \int_0^x e^{-nt}\,dt = -\frac{xe^{-nx}}{n} - \frac{1}{n^2} \left[ e^{-nt} \right]_0^x$

$$= -\frac{xe^{-nx}}{n} - \frac{1}{n^2}(e^{-nx} - 1)$$

donc $I_n(x) = -\dfrac{x^2 e^{-nx}}{n} - \dfrac{2xe^{-nx}}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}(e^{-nx} - 1)$

$$= -\frac{e^{-nx}}{n^3}(n^2x^2 + 2nx + 2) - \frac{2}{n^3}$$

d) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-e^{-nx}}{n^3}(n^2x^2 + 2nx + 2) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n^3}(-(n^2x^2)e^{-nx} + 2(nx)e^{-nx} + 2e^{-nx}) = 0$ car :

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (n^2x^2)e^{-nx} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( nxe^{\frac{-nx}{2}} \right)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2Xe^X)^2 = 0 \quad \left( X = \dfrac{-nx}{2} \right)$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} -2(nx)e^{-nx} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2Xe^X = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x) = \dfrac{2}{n^3}$

2°/ a) d'après **B**- 1°/ a) on a $\forall t > 0$ ;

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kt} + \frac{e^{-nt}}{e^{-t} - 1} \Rightarrow \frac{t^2}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + \frac{t^2 e^{-nt}}{e^{-t} - 1} \Rightarrow$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$$